10/5/2016

Αναζήτηση σχέσης μεταξύ τοπικών και ολικών ιδιοτήτων κανονικών επιφανειών

Τοπικές: καμπυλότητα

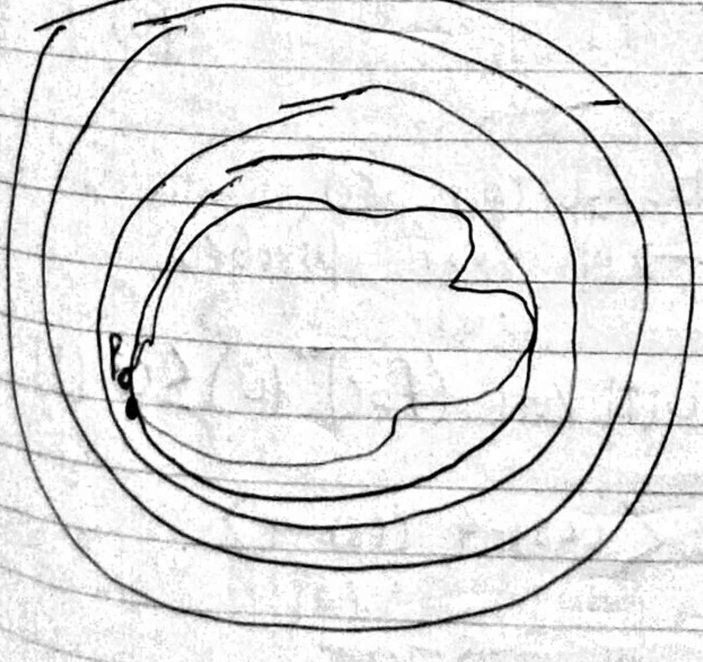
Ολικές: Τοπολογικές Ιδιότητες

Σημαντικό Παράδειγμα σχέσης

Gauss-Bonnet $\iint_S K\,d\sigma = 2\pi X(S)$

$K>0$ παντού $\Longrightarrow$ S ομοιομορφική με την S^2

Ερώτημα: Υπάρχουν συμπαγείς επιφάνειες με καμπυλότητα Gauss $K \leq 0$



Στο P_0 $K_S(P_0) \geq K_{σφαι} > 0$

Θεώρημα: Δεν υπάρχουν συμπαγείς επιφάνειες με $K \leq 0$ (ή ισοδύναμα κάθε συμπαγής επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$ έχει ένα τουλάχιστον ελλειπτικό σημείο)

Απόδειξη: Θεωρώ τη συνάρτηση $f: S \to \mathbb{R}$ με $f(p) = \|p-q\|^2$ όπου q σταθερό σημείο του $\mathbb{R}^3 \setminus S$ είναι διαφορίσιμη.

Επειδή S συμπαγής $\Rightarrow \exists\, p_0 \in S: f(p_0) = \max f$

Έστω $w \in T_{p_0}S \setminus \{0\}$ και $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ καμπύλη με $c(0) = p_0$ και $c'(0) = w$

Υποθέτω ότι η c έχει παράμετρο το μήκος τόξου. Η $f \circ c: (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ έχει μέγιστο στο $s_0 = 0$. Άρα $(f \circ c)^{\cdot}(0) = 0$ (1) και $(f \circ c)^{\cdot\cdot}(0) \leq 0$ (2)

$f \circ c(s) = f(c(s)) = \|c(s) - q\|^2 = \langle c(s) - q, c(s) - q \rangle$

$(f \circ c(s))^{\cdot} = 2 \langle \dot{c}(s), c(s) - q \rangle$ για $s = 0$

$\Rightarrow (f \circ c(0))^{\cdot} = 2 \langle \dot{c}(0), c(0) - q \rangle = 2 \langle w, p_0 - q \rangle$

Από (1) $\Rightarrow$ $w \perp p_0 - q$

Έδειξα ότι $\forall w \in T_p S \quad w \perp p_0 - q$

$$\Rightarrow N(p_0) = \pm \frac{p_0 - q}{\|p_0 - q\|}$$

$$(f \circ c)''(s) \overset{(1)}{=} 2\langle c''(s), c(s) - q \rangle + 2\langle c'(s), c'(s) \rangle$$

$$\overset{s=0}{\Longrightarrow} 2\langle c''(0), c(0) - q \rangle + 2\langle c'(0), c'(0) \rangle$$

$$\Rightarrow ((f \circ c)(0))'' = 2\langle c''(0), p_0 - q \rangle + 2\langle w, w \rangle$$

έστω $\quad N(p_0) = \dfrac{p_0 - q}{\|p_0 - q\|} \Rightarrow p_0 - q = \|p_0 - q\| \cdot N(p_0)$

$$= \sqrt{f(p_0)} \cdot N(p_0)$$

$$(f \circ c)''(0) = 2\langle c''(0), \|p_0 - q\| \cdot N(p_0) \rangle + 2 \leq 0$$

$$\Rightarrow \langle c''(0), \|p_0 - q\| \cdot N(p_0) \rangle + 1 \leq 0$$

$$\Rightarrow \langle c''(0), N(p_0) \rangle + \frac{1}{\|p_0 - q\|} \leq 0 \qquad (3)$$

$$\langle c''(0), N(p_0) \rangle = \langle c''(0), N \circ c(0) \rangle = \frac{d}{ds}\Big|_0 \cancel{\langle c'(s), N \circ c(s) \rangle}$$

$$- \langle c'(0), (N \circ c)'(0) \rangle = + \langle c'(0), -dN_{p_0}(0) \rangle$$

$$= \langle w, L_{p_0}(w) \rangle$$

$$\overset{(3)}{\Longrightarrow} (f \circ c)''(0) = \langle w, L_{p_0}(w) \rangle + \frac{1}{\|p_0 - q\|} \leq 0$$

$$\Rightarrow \langle L_{p_0}(w), w\rangle \leq \frac{1}{\|p_0-w\|} \quad \forall w \in T_pS \text{ με } \|w\|=1$$

$$\Rightarrow II_{p_0}(w) \leq \frac{1}{\|p_0-q\|} \Leftrightarrow k_n(w) \leq -\frac{1}{\|p_0-q\|}$$

$$k_1(p_0) = \max_{\|w\|=1} k_n(w) \qquad k_2(p_0) = \min_{\|w\|=1} k_n(w)$$

$$\Rightarrow k_1(p_0) \leq -\frac{1}{\|p_0-q\|} \quad \text{και} \quad k_2(p_0) \leq -\frac{1}{\|p_0-q\|}$$

$$\Rightarrow k_1(p_0)\cdot k_2(p_0) \geq \frac{1}{\|p_0-q\|} \Rightarrow K \geq \frac{1}{\|p_0-q\|^2} > 0$$

<u>Ερώτημα</u>: Υπάρχουν, εκτός των σφαιρών, άλλες συμπαγείς επιφάνειες του $\mathbb{R}^3$ με σταθερή καμπυλότητα Gauss.

Παρατήρηση: Αν S συμπαγής με καμπυλότητα Gauss $K = c =$ σταθερά $\Rightarrow K > 0$

Θεώρημα (Liebmann): Οι μόνες συμπαγείς επιφάνειες του $\mathbb{R}^3$ με σταθερή καμπυλότητα Gauss είναι οι σφαίρες.

Έστω S επιφάνεια ισομετρική με μια σφαίρα, από το έξοχο Θεώρημα $K_S = K_{S^2_R} = \frac{1}{R^2}$

Η S συμπαγής αφού είναι ομοιομορφική με τη σφαίρα S^2

$\xRightarrow{\text{Liebmann}}$ S σφαίρα

Λήμμα: Έστω S κανονική επιφάνεια αν σε σημείο $p_0 \in S$ ισχύουν:

(i) $K(p_0) > 0$ (ii) Η k_1 παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο p_0

(iii) Η k_2 παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο p_0

τότε το p_0 είναι ομφαλικό

Απόδειξη: Έστω p_0 δεν είναι ομφαλικό, δηλαδή $k_1(p_0) > k_2(p_0)$ $\quad k_1 = H + \sqrt{H^2 - K}$, $k_2 = H - \sqrt{H^2 - K}$ συνεχείς συναρτήσεις. Λόγω συνέχειας υπάρχει περιοχή V του p_0 ώστε $k_1 > k_2$ στο V

$\Rightarrow \exists$ γύρω από το p_0 σύστημα $X(u,v)$ γραμμών καμπυλότητας δηλαδή $F = f = 0$

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{e}{E} \cdot \frac{g}{G}$$

$$H = \frac{Eg - 2Ff + Ge}{2(EG - F^2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{e}{E} + \frac{g}{G}\right)$$

$$K_1 K_2 = \frac{e}{E} \cdot \frac{g}{G} \qquad K_1 + K_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{e}{E} + \frac{g}{G}\right)$$

$\Rightarrow \{K_1, K_2\} = \left\{\frac{e}{E} + \frac{g}{G}\right\}$. Έστω ότι

$K_1 = \frac{e}{E}$ και $K_2 = \frac{g}{G}$ (Όμοια αν $K_1 = \frac{g}{G}, K_2 = \frac{e}{E}$)

<u>Εξισώσεις Mainaldi - Coldazzi:</u>

$$e_v = \frac{E_v}{2}(K_1 + K_2) \qquad g_u = \frac{G_u}{2}(K_1 + K_2)$$

Επειδή $F = 0 \xrightarrow[\text{θεώρημα}]{\text{Έξοχο}} K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left\{\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)_u\right\}$

$$\left.\begin{aligned} E(k_1)_v &= \frac{E_v}{2}(k_2-k_1) \\ G(k_2)_u &= \frac{G_u}{2}(k_1-k_2) \end{aligned}\right\}$$

$$(*) \Rightarrow -2EGK = E_{vv} + G_{uu} + ME_v + NG_v$$

$$\Leftrightarrow -2EGK = \frac{-2E}{k_1-k_2}(k_1)_{vv} + \frac{2G}{k_1-k_2}(k_2)_{uu}$$

$$+ \tilde{M}(k_1)_{\cancel{v}} + \tilde{N}(k_2)_u$$

$$\Leftrightarrow -2EGK(k_1-k_2) = -2E(k_1)_{vv} + 2G(k_2)_{uu} + M_1(k_1)_{\cancel{v}}$$
$$+ N_1(k_2)_u \quad (1)$$

Στο p_0: $(k_1)_v = 0 = (k_2)_u$

$(k_1)_{vv} \le 0$, $(k_2)_{uu} \ge 0$

$(*)$ (1) στο p_0 $\quad \underbrace{-2EGK(k_1-k_2)}_{\le 0} = \underbrace{-2E\overbrace{(k_1)_{vv}}^{\ge 0} + 2G\overbrace{(k_2)_{uu}}^{\ge 0}}_{\ge 0}$

(Άτοπο) $\Rightarrow$ p_0 ομφαλικό σημείο

Θεώρημα Liebmann: Έστω S συμπαγής επιφάνεια με σταθερή καμπυλότητα. Τότε S σφαίρα

Απόδειξη: Θα δείξω ότι όλα τα σημεία είναι ομφαλικά. Γνωρίζουμε ότι $K>0$

η k_1 και k_2 ως συνεχείς συναρτήσεις με πεδίο ορισμού θα έχουν ολικό μέγιστο και ολικό ελάχιστο. Έστω ότι $k_1(p_0)=\max\limits_S k_1$

$k_2(p_0)=\min\limits_S k_2 \xRightarrow{\text{Λήμμα}} p_0$ ομφαλικό σημείο, δηλαδή $k_1(p_0)=k_2(p_0)\neq 0$. Έστω $p\in S$

$$k_1(p)\leq k_1(p_0)=k_2(p_0)=\min k_2\leq k_2(p)$$

$\Rightarrow k_1(p)\leq k_2(p)$ Όμως γενικά $k_2(p)\leq k_1(p)$

$\Rightarrow k_1(p)=k_2(p)\neq 0 \Rightarrow p$ ομφαλικό

$\xRightarrow{+++} S$ ολόκληρη σφαίρα

Πρόβλημα: Να βρεθούν οι συμπαγείς κανονικές επιφάνειες με σταθερή μέση καμπυλότητα

Έστω S συμπαγής επιφάνεια με σταθερή μέση καμπυλότητα $H=c \Leftrightarrow k_1+k_2=2c$ (*)

Υπόθεση: $K>0$ παντού

Θεωρώ $p_0 \in S$ ώστε $k_1(p_0) = \max_S k_1$

$\Rightarrow k_2$ λαμβάνει ολικό ελάχιστο στο p_0

$\Rightarrow p_0$ ομφαλικό ... $k_1(p) = k_2(p)$

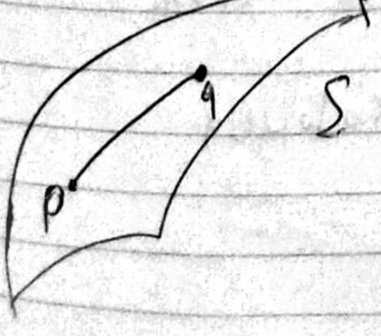
<u>Θεώρημα</u>: Έστω S συμπαγείς επιφάνεια με σταθερή μέση καμπυλότητα. Αν $K > 0$ παντού

$\Rightarrow S \equiv$ σφαίρα

(<u>Θεωρημα</u>: (SÜSS) $K \not> 0$ $\rightsquigarrow$ εσωτερικό S είναι αστερόσχημο)

<u>Πρόβλημα</u>: Δίνονται σημεία $p, q \in S$. Υπάρχει καμπύλη που ενώνει τα p, q με ελάχιστο μήκος μεταξύ όλων των καμπυλών που ενώνουν τα p, q.

<u>Απόσταση σε Κανονικές Επιφάνειες</u>:



Ορισμός: Καλούμε απόσταση των σημείων $p, q \in S$ τον αριθμό $d_S(p,q) = \inf\{L(c) / \text{όπου } c \text{ κατά τμήματα κανονική με άκρα } p, q\}$

$d_S : S \times S \to [0,+\infty)$

<u>Πρόταση</u>: (i) $d(p,q) = d(q,p)$

(ii) $d(p,q) \geq 0$ επιπλέον $d(p,q) = 0 \Leftrightarrow p = q$

(iii) $d(p,q) \leq d(p,r) + d(r,q)$

Η d είναι μετρική

<u>Πρόταση</u>: Η τοπολογία που ορίζει η μετρική d είναι η επαγόμενη τοπολογία της S

<u>Ορισμός</u>: Μια κανονική επιφάνεια καλείται πλήρης αν κάθε ακολουθία Cauchy συγκλίνει

Παραδείγματα πλήρων επιφανειών: επίπεδο, σφαίρα κάθε συμπαγής επιφάνεια

Θεώρημα: Μια κανονική επιφάνεια είναι πλήρης αν-ν ένα από τα ακόλουθα ισοδύναμα ισχύει

(i) Το πεδίο ορισμού κάθε γεωδαισιακής είναι το $\mathbb{R}$

(ii) Η εκθετική απεικόνιση ορίζεται για κάθε $p \in S$ σ' ολόκληρο το εφαπτόμενο επίπεδο T_pS